SUR UN THÉORÈME DE J. L. KRIVINE CONCERNANT LA CARACTERISATION DES CLASSES D'ESPACES ISOMORPHES A DES ESPACES D'ORLICZ GÉNÉRALISÉS ET DES CLASSES VOISINES

PAR
D. DACUNHA-CASTELLE

ABSTRACT

The class L^p the classes λ-SL_p of spaces λ isomorphic to subspaces of L^p spaces and λ-QL^p of subquotients have been characterized in the literature by formulas of certain simple forms. A theorem of Krivine gives a general demonstration of these results in the framework of ψ normed spaces. In particular, characterizations of subspaces and subquotients of certain classes of generalized Orlicz spaces are obtained.

Par un théorème inspiré de résultats classiques de la théorie des modèles en logique, mais ne nécessitant aucun résultat de logique pour sa démonstration, J. L. Krivine a trouvé une méthode extrèmement claire pour résoudre le problème suivant: trouver la forme de la caractérisation des classes de Banach stables par ultraproduit et surtout ayant trouvé la caractérisation de $\mathscr{C}$ en déduire la caractérisation de λ-$\mathscr{C}$ classe des espaces λ-isomorphes à $\mathscr{C}$ et de λ-$Q\mathscr{C}$ classe des espaces λ-isomorphes aux quotients de $\mathscr{C}$. Nous exposons ici ce théorème dans le cadre général d'une théorie des ϕ-espaces, extension formelle des espaces d'Orlicz généralisés, c'est-à-dire des intégrales d'espaces d'Orlicz (sommes continues). Dans ce cadre nous généralisons et donnons une démonstration unitaire des résultats de Lindenstrauss et Pelcynski [7] concernant λ-SL^p, de Kwapien [4] λ-SQL^p, de Dacunha-Castelle et Krivine [3] concernant certaines classes d'Orlicz.

Dans la première partie, nous avons introduit le calcul des ultraproduits d'espaces d'Orlicz, qui a probablement des liens étroits avec la théorie des isomorphismes entre ces espaces ([8], [1]).

1. ψ-espaces et espaces d'Orlicz généralisés

A. ψ-espaces. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\psi: E \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que

1. $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. $\psi(-x) = \psi(x)$,
3. $\psi(\theta x + (1-\theta)y) \leqq \theta\psi(x) + (1-\theta)\psi(y)$ pour tout $\theta \in [0,1]$, $x, y \in E$.

ψ est donc convexe et $\psi_x(\lambda) = \psi(\lambda x)$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$. En posant $\| x \| = \inf_{\mathbb{R}^+} \{\lambda, \psi(x/\lambda) \leqq 1\}$ on définit sur E une structure d'espace normé (immédiat).

Exemples 1) Soit E un espace de Banach, $\psi(x) = F(\| x \|)$, où F est une fonction convexe.

2) Soit F une fonction convexe $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, satisfaisant la condition Δ_2 d'Orlicz: il existe $k > 1$ avec $F(2x) < k\ F(x)$ pour tout x. L'espace $L_F(\Omega, \mu)$ des μ-classes de fonctions f, F-sommables, est un ψ-espace de Banach, avec

$$\psi(f) = \int_\Omega F(|f|)d\mu.$$

Proposition. *Tout quotient de ψ-espace est un ψ-espace.*

De manière précise, soit (E, ψ) un ψ-espace de Banach et soit F un sous-espace fermé de (E, ψ). Soit $E' = E/F$, $\bar{x}$ la classe de x. Posons $\bar{\psi}(\bar{x}) = \inf\{\psi(y),\ y - x \in F\}$. Alors $(E', \bar{\psi})$ est un ψ-espace et on a $\| x \|_{E',\psi} = \| x \|_{E/F}$, c'est-à-dire que les structures quotients associées au ψ et à la norme définie par ψ sont identiques.

La démonstration en est immédiate.

Si (E_1, ψ_1) et (E_2, ψ_2) sont deux ψ-espaces, une ψ-isométrie (resp. un λ-ψ-isomorphisme) sera une application linéaire $T: E_1 \to E_2$, surjective, telle que $\psi_2(Tx) = \psi_1(x)$ (resp. telle que $\sup_x(\psi_1(x)/\psi_2(Tx), \psi_2(Tx)/\psi_1(x)) \leqq \lambda$). Nous indiquerons plus loin, le rapport entre ψ-isomorphismes et isomorphismes au sens des Banach, dans les cas qui nous intéressent.

B. Fonctions Φ majorant ψ. Soit (E, ψ) un ψ-espace, soit Φ une fonction $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que

1) $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2) Φ est continue au point 1.

On dit que Φ majore ψ si l'on a

$$\frac{\psi(\lambda x)}{\psi(x)} \leqq \Phi(\lambda), \text{ pour tout } x \in E.$$

On a une notion semblable de fonction Φ minorant ψ.

EXEMPLE 1. Si on considère l'espace d'Orlicz $L_F(\Omega, \mu)$ la fonction $\Phi(\lambda) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(\lambda x)/F(x)$, majore ψ.

De même $1/\Phi(1/\lambda)$ minore ψ. Ceci est général. Si Φ majore ψ, $\Phi^{-1}(1/\lambda)$ minore ψ.

Si (E, ψ) est majoré par Φ, on a évidemment $\psi(x_n) \to 0$ (resp. ∞) $\Leftrightarrow \| x_n \| \to 0$ (resp. ∞) et tout $\lambda\psi$-isomorphisme (au sens précédent) est un λ'-isomorphisme (λ et λ' en général différents).

C. Opérations sur les familles majorées de ψ-espaces. Soit $(E_i, \psi_i)_{i \in I}$ une famille de ψ-espaces indexée par I. Nous supposons que les ψ_i sont tous majorés par la même fonction Φ.

La ψ-somme (directe) de la famille $(E_i, \psi_i)_{i \in I}$, notée $\oplus_{i \in I} (E_i, \psi_i)$ est le sous-espace de $\prod_{i \in I} E_i$, constituée des familles $(x_i)_{i \in I}$ telles que $\sum_{i \in I} \psi_i(x_i) < \infty$.

Enfin, soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur I (supposé non trivial sauf indication contraire). L'ultraproduit des ψ-espaces (E_i, ψ_i) suivant $\mathscr{U}$ est ainsi défini.

Soit $B = \{(x_i)_{i \in I}$, il existe M avec $\psi_i(x_i) \leqq M\}$. On pose sur B, $\psi((x_i)_{i \in I}) = \lim_{\mathscr{U}} \psi_i(x_i)$. On pose

$$\mathscr{W} = \{(x_i)_{i \in I} \in B,\ \psi((x_i)_{i \in I}) = 0\}.$$

Alors $B/\mathscr{W}$ est par définition l'ultraproduit noté $\prod_{i \in I} E_i/\mathscr{U}$: c'est un ψ-espace de Banach.

Il est alors immédiat de vérifier que ultraproduit au sens des ψ-espaces et ultraproduit au sens des espaces de Banach [3] coïncident.

D. Classes $\mathscr{F}$ de fonctions convexes. Espaces d'Orlicz généralisés. On notera $\mathscr{F}$ une classe de fonctions convexes $F: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, (F pourra être supposée strictement croissante), qui a les propriétés suivantes:

1) On suppose qu'il existe une fonction Φ sur $\mathbb{R}^+$ convexe donc continue en 1, avec

$$\frac{F(\lambda x)}{F(x)} \leqq \Phi(\lambda) \text{ pour tout } x, \lambda \in \mathbb{R}^+_*, F \in \mathscr{F}.$$

2) Pour toute famille $(a_i)_{i \in I}$, $a_i \in \mathbb{R}^+$, tout ultrafiltre, trivial ou non, $\mathscr{U}$ sur I, on a

$$\lim_{\mathscr{U}} \frac{F_i(a_i x)}{F_i(a_i)} \in \mathscr{F}, \quad \text{si } F_i \in \mathscr{F} \text{ pour tout } i.$$

EXEMPLE 1. $\mathscr{F} = \{x^{p_0}\}$, $p_0 \geqq 1$.

On définira pour $\mathscr{F}$ donnée, une classe d'espaces $L_{\mathscr{F}}$ de la manière suivante. Soit (Ω, μ) un espace mesuré, et $G\colon \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une application telle que $G(\omega, .) \in \mathscr{F}$ pour tout ω. On note alors $L_G(\Omega, \mu)$ l'espace des classes de fonctions f μ-mesurables telles que $\psi_G(f) = \int G(\omega, |f(\omega)|)\, d\mu(\omega) < \infty$. Il est facile de vérifier que L_G est un ψ-espace de Banach. Lorsque G varie ainsi que (Ω, μ) on appelle $L_{\mathscr{F}}$ la classe de tous les espaces $L_G(\Omega, \mu)$ (espaces d'Orlicz généralisés).

THÉORÈME 1. *La classe $L_{\mathscr{F}}$ est stable par ultraproduit et ψ-somme directe.*

DÉMONSTRATION. Sur $L_G(\Omega, \mu)$, on pose $\|f\| = \inf(\lambda > 0,\ \psi f/\lambda \leqq 1)$ où $\psi(f) = \int_\Omega G(\omega, f(\omega))\, d\mu(\omega)$.

Alors, il est clair que L_G est réticulé pour l'ordre naturel et que l'on a les propriétés suivantes:

1) $0 \leqq f < g \Rightarrow \|f\| < \|g\|$

2) $f \cap g = 0 \Rightarrow \psi(f + g) = \psi(f) + \psi(g)$.

Soit $(L_{G_i}(\Omega_i, \mu_i))_{i \in I}$ une famille d'espaces de $L_{\mathscr{F}}$ et l'ultraproduit

$$B = \prod_{i \in I} L_{G_i}(\Omega_i, \mu_i)/\mathscr{D}.$$

Les propriétés 1 et 2 ne passent pas à l'ultraproduit, mais elles sont impliquées par les propriétés plus fortes suivantes qui passent à l'ultraproduit, si $f, g \geqq 0$, on a

$$\psi(f) + \psi(g) \leqq \psi(f + g) \leqq \psi(f + f \cap g) + \psi(g + f \cap g).$$

On peut donc appliquer à B les propositions 2.1 et 2.2. de [3] qui montrent que si $(f_i^\alpha)_{i \in I}$ est un système maximal $(\alpha \in \Lambda)$ d'éléments $\geqq 0$, deux à deux disjoints de norme 1 de B, si B_α est l'espace de Banach engendré par les éléments

$$\{(g_i)_{i \in I};\ \text{il existe } M \text{ avec } (g_i)_{i \in I} \leqq M(f_i^\alpha)_{i \in I}\}$$

alors $B = \oplus_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$.

On a donc a montrer que, si $(f_i^0)_{i \in I}$ est un élément de norme 1 de B et B_0 l'espace associé à $(f_i^0)_{i \in I}$, alors $B_0 \in L_{\mathscr{F}}$.

On pose $\Omega = \Pi_{i \in I} \Omega_i$, et on désigne par $\mathscr{L}^\infty(\Omega_i, \mu_i)$ l'espace de fonctions mesurables bornées sur Ω_i, avec $\|f_i\| = \sup_{\omega_i \in \Omega_i} |f_i(\omega_i)|$. L'application de $\mathscr{L} = \prod_{i \quad I} \mathscr{L}^\infty(\Omega_i, \mu_i)/\mathscr{D}$ dans $l^\infty(\Omega)$ qui à $(f_i)_{i \in I}$ associe $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ définie

$$f(\omega) = \lim_{\mathscr{D}} f_i(\omega_i) \qquad (\omega = (\omega_i)_{i \in I})$$

est un isomorphisme de $\mathscr{L}$ dans $l^\infty(\Omega)$ pour les structures d'espace de Banach réticulé et d'algèbre.

On peut donc considérer $\mathscr{L} \subset l^\infty(\bar{\Omega}) = \mathscr{C}(\bar{\Omega})$ où $\bar{\Omega}$ est l'espace compact des ultrafiltres sur Ω, (spectre de l'algèbre $l^\infty(\Omega)$).

De plus il est clair que si $f \in \mathscr{L}$ et si f est inversible dans $l^\infty(\bar{\Omega})$, alors son inverse est dans $\mathscr{L}$. Il en résulte que $\mathscr{L} = \mathscr{C}(K)$, K étant un espace compact quotient de $\bar{\Omega}$. Tout élément δ de K est donc représenté par un ultrafiltre sur Ω; toute forme linéaire $\geqq 0$ sur $\mathscr{L}$ est une mesure de Radon $\geqq 0$ sur K.

Soit $f = (f_i)_{i \in I} \in B_0$, avec $|f_i| \leqq M f_i^0$ pour tout $i \in I$. On pose

$$g(\omega) = \lim_{\mathscr{D}} \frac{f_i(\omega_i)}{f_i^0(\omega_i)};$$

$$h(\omega) = \lim_{\mathscr{D}} \frac{G_i(\omega_i, |f_i \omega_i|)}{G_i(\omega, |f_i^0 \omega_i|)}.$$

On a $g(\omega) < M$, $h(\omega) \leqq \Phi(M)$ donc g, $h \in \mathscr{L}$.

On définit $G_\omega \in \mathscr{F}$ en posant, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$G_\omega(x) = \lim_{\mathscr{D}} \frac{G_i(\omega_i, x f_i^0 \omega_i)}{G_i(\omega, f_i^0 \omega_i)}$$

En effet si $F_i \in \mathscr{F}$, $\lim_{\mathscr{D}} \dfrac{F_i(a_i x)}{F_i(a_i)} \in \mathscr{F}$ par hypothèse.

De plus si $x_i \Rightarrow x$, $x_i \in \mathbb{R}^+$, comme

$$\frac{1}{\Phi\left(\dfrac{x}{x_i}\right)} \leqq \frac{F_i(a_i x_i)}{F_i(a_i x)} \leqq \Phi\left(\frac{x_i}{x}\right)$$

et que Φ est continue au point 1, $\Phi(1) = 1$, on a

$$\lim_{\mathscr{D}} \frac{F_i(a_i x_i)}{F_i(a_i x)} = 1$$

et donc

$$\lim_{\mathscr{D}} \frac{F_i(a_i x_i)}{F_i a_i} = \lim_{\mathscr{D}} \frac{F_i(a_i x)}{F_i(a_i)}.$$

Par suite $h(\omega) = G_\omega(|g(\omega)|$ où G est une application $\Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$= G(\omega, |g(\omega)|)$$

telle que $G(\omega, \cdot) \in \mathscr{F}$. Si $\delta \in K$, $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$G(\delta, x) = \lim_{\delta} G(\omega, x).$$

A x fixé, $G(0,x)$ est continue (car $G(\omega,x)\in\mathscr{L}$). A δ fixé, $G(\delta,\cdot)\in\mathscr{F}$.

En fait G est continue $K\times\mathbb{R}^+$. En effet si δ est assez voisin de δ_0, $|G(\delta,x_0)-G(\delta_0,x_0)|<\varepsilon/2$, et si on choisit alors x assez voisin de x_0 pour que

$$[\varepsilon+F(\delta_0,x_0)]\left(\phi\left(\frac{x}{x_0}\right)-\frac{1}{\phi\left(\frac{x_0}{x}\right)}\right)\leqq\frac{\varepsilon}{2},\text{ on a}$$

$$\frac{G(\delta,x_0)}{\phi\left(\frac{x_0}{x}\right)}\leqq G(\delta,x)\leqq G(\delta,x_0)\,\phi\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

d'où $|G(\delta,x)-G(\delta,x_0)|<\varepsilon/2$ et donc $|G(\delta,x)-G(\delta_0,x_0)|<\varepsilon$. Soit $\theta\in h$, $\theta=(\theta_i)_{i\in I}$. On pose

$$T(\theta)=\lim_{\mathscr{D}}\int_{\Omega_i}\theta_i(\omega_i)\,G_i(\omega_i,f_i^0\omega_i)\,\mu_i(d\omega_i).$$

Ceci définit une forme linéaire $\geqq 0$ sur $\mathscr{L}$ et donc il existe une mesure de Radon telle que $T(\theta)=\int_K\theta(\delta)\,\mu(d\delta)$, pour une certaine mesure de Radon $\mu\geqq 0$ sur K.

$$\begin{aligned}T(h)&=\int_K G(\delta,|g(\delta)|)\,\mu(d\delta)\\&=\lim\int_{\Omega_i}\frac{G_i(\omega_i,f_i(\omega_i))}{G_i(\omega_i,f_i^0(\omega_i))}G_i(\omega,f_i^0(\omega_i))\,\mu_i(d\omega_i)=\psi(f).\end{aligned}$$

L'application

$$f=(f_i)_{i\in I}\to g$$

est donc un isomorphisme de ψ-espace réticulé d'un sous-espace dense de B_0 sur $l(K)$ sous-espace dense de $L_G(K,\mu)$. Donc B_0 est isomorphe à $L_G(K,\mu)$.

Généralisation et applications.

On peut étendre (cf. [6]) ce type de résultats. On peut aussi en utilisant les résultats de [3] obtenir des précisions.

DÉFINITION. Une classe $\mathscr{F}$ de fonctions convexes F est dite fermée si elle vérifie les conditions suivantes:

1) $F(0)=0$; (on ne suppose pas $F(1)=1$).

2) Les fonctions de $\mathscr{F}$ sont majorées par une même fonction Φ.

3) Si $F\in\mathscr{F}$, $\lambda F\in\mathscr{F}$ pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^+$.

4) Pour tout ultrafiltre $\mathscr{U}$ sur un ensemble J et toute famille $(F_j)_{j\in J}$ de $\mathscr{F}$, on a $\lim_{\mathscr{U}} F_j\in\mathscr{F}$.

THÉORÈME. *Une classe d'epaces d'Orlicz $L_{\mathscr{F}}$ est stable par ultraproduit si et seulement si $\mathscr{F}$ est fermée.*

Soit l_F l'espace des suites F-sommables.

THÉORÈME. *Toute ultra-puissance $l_F^{I/\mathfrak{U}}$ de l_F est de la forme*

$$l_F(N^{I/\mathfrak{U}}) \oplus \int_{E_0(F)} L_G \, d\mu$$

ou cette dernière intégrale est ainsi définie: il existe une application mesurable $H: \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, où (Ω, μ) est un espace compact mesuré, telle que $H(\omega, \cdot) \in E_0(F)$ avec

$$E_0(F) = \{\lim aF_j(b_j x);\ a_j, b_j \in \mathbb{R}^+,\ b_j \to 0\}$$

$$= \textit{la plus petite classe fermée contenant } F.$$

$$\int_{E_0(F)} L_F \, d\mu = \left\{h;\ h: \Omega \to R,\ \int_\Omega H(\omega, |h(\omega)|)\, d\mu(\omega) < \infty\right\}.$$

Nous avons introduit ici la notion de ψ-isomorphisme, car elle conduit à certaines généralisations naturelles de propriétés importantes des espaces L^p à des classes plus larges d'espaces. C'est en particulier ce qui sera montré dans la deuxième partie. Mais du point de vue isomorphisme, la théorie des ψ-espaces est évidement plus pauvre.

L'exemple suivant illustre la situation. Soit F donnée, désignons par $C(F)$ les combinaisons convexes de fonctions du type $aF(bx)$ et par $C(F)$ les combinaisons convexes de fonctions de $E_0(F)$. Soit l_G l'espace des suites G-sommables. On a:

THÉORÈME. 1. (Lindenstrauss et Tzafriri, [8]). *l_G est isomorphe à un sous-espace de l_F si et seulement si G est équivalente à une fonction de $C(F)$.*

2) *l_G est ψ-isomorphe à un sous espace de l_F si et seulement si G est équivalente à une fonction de $C(F)$.*

Les démonstrations de ces résultats sont très simples.

2. Caractérisations et théorème de Krivine

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{C}$ une classe de ψ-espaces stable par ψ-somme, ultraproduit, sous-espace et ψ-isométrie. Alors $\mathscr{C}$ est caractérisée par un ensemble Γ de formules du type*

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^\alpha \, \psi(a_{i,\alpha}^1 x_1 + \cdots + a_{i,\alpha}^n x_n) \geqq 0\right]$$

(α indice de la formule). La réciproque est vraie.

DÉMONSTRATION. La réciproque est évidente.

Soit (Γ') l'ensemble des conditions du type:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n (\cdots \text{ ou } \psi(x_i) \neq a_i \text{ ou} \cdots \text{ou } \psi(x_i + x_j - x_k) \neq 0$$
$$\text{ou} \cdots \text{ou } \psi(x_i - \lambda x_j) \neq 0 \text{ ou} \cdots)$$

qui sont vraies dans tout espace de $\mathscr{C}$.

Soit alors une partie finie P d'un ψ-espace B satisfaisant à (Γ'). $P = \{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}$. Il existe un espace C_P de $\mathscr{C}$ et des éléments $x_1^P \cdots x_n^P$ de C_P tels que

$$\psi(\bar{x}_i) = \psi(x_i^P), \qquad i = 1, \cdots, n,$$
$$\bar{x}_i + \bar{x}_j = \bar{x}_k \Rightarrow x_i^P + x_j^P = x_k^P, \qquad i, j, k = 1, \cdots, n$$
$$\bar{x}_i - \lambda \bar{x}_j = 0 \Rightarrow x_i^P - \lambda x_j^P = 0.$$

S'il n'existait pas C_p et $x_1^p \cdots x_n^p$ on aurait

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n (\cdots \text{ou } \psi(x_i) \neq \psi(\bar{x}_i) \text{ ou} \cdots \text{ou } \psi(x_i + x_j - x_k) \neq 0$$
$$\text{ou} \cdots \text{ou } \psi(x_i - \lambda x_j) \neq 0 \text{ ou} \cdots)$$

formule satisfaite pour tout espace C de $\mathscr{C}$, donc faisant partie de Γ mais non satisfaite par B, ce qui est impossible.

Considérons alors l'application $i \colon B \to \prod_{p \in \mathscr{P}} C_p/\mathscr{U}$ (où $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur l'ensemble $\mathscr{P}$ des parties finies de B, tel que pour tout P, $\{F, F \in \mathscr{P}, F \supset P\} \in \mathscr{U}$) définie par $\bar{x} \to (y_p)_{P \in \mathscr{P}}$ avec

$$y_p = x_p \quad \text{si } \bar{x} \in P$$
$$y_p = 0 \quad \text{si } \bar{x} \notin P.$$

Il est clair que grâce à la propriété de $\mathscr{U}$, i est une isométrie linéaire. D'après les propriétés de $\mathscr{C}$, $\prod_{P \in \mathscr{P}} C_P/\mathscr{U}$ est dans $\mathscr{C}$ et donc aussi B. (On n'a pas utilisé pour l'instant le fait que $\mathscr{C}$ était stable par ψ-somme).

Remarquons, que l'on peut remplacer (Γ') par l'ensemble (Γ'') de formules

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n (\cdots \text{ ou } \psi(x_1 + x_j + x_k) \neq a_{ijk} \text{ ou} \cdots)$$

car il est facile de refaire le raisonnement précédent en cherchant $x_1^p, \cdots, x_n^p$ tels que

$$\psi(\bar{x}_i + \bar{x}_j + \bar{x}_k) = \psi(x_i^p + x_j^p + x_k^p)$$

ce qui suffit à assurer l'existence d'une isométrie $i \colon C \to \prod_{P \in \mathscr{P}} C_P/\mathscr{U}$.

Considérant alors, par exemple (Γ''), soit F_n l'ensemble des points $(a_{ijk})_{i\neq j,k=1,\ldots,n}\in\mathbb{R}^{n^3}$ qui apparaissent dans (Γ'') et G_n le complémentaire de F_n. Il est clair que C_n est un cône. On montre comme dans ([3], p. 329) que C_n est fermé.

On peut alors écrire (Γ'') sous la forme:

$$\forall x_1\cdots\forall x_n((\psi(x_i+x_j+x_k))_{i,j,k=1,\cdots,n}\in D_n),$$

D_n désignant l'ensemble des points du cône C_n effectivement atteints, c'est à dire tels qu'il existe au moins $\{x_1\cdots x_n\}\subset B$, $B\in\mathscr{C}$, tels que

$$(\psi(x_i'+x_j'+x_k'))_{i,j,k=1,\cdots,n}\in C_n.$$

Comme $\mathscr{C}$ est stable par ψ somme il est clair que D_n est convexe, car si $(x_1'\cdots x_n')\in B\in\mathscr{C}$, $(y_1'\cdots y_n')\subset C\in\mathscr{C}$, on a

$$(x_1'+y_1,\cdots x_n'+y_n')\subset(B\oplus C)_\psi$$

et

$$\psi(x_1'+y_1'+\cdots+x_n'+y_n')=\psi(x_1'+\cdots+x_n')+\psi(y_1'+\cdots+y_n')\in D_n.$$

Soit alors $(\lambda^\alpha_{i,j,k})_{\alpha\in A}$ les formes linéaires définissant les hyperplans d'appui du cône convexe D_n. (Γ'') équivaut donc à l'ensemble des conditions

$$\forall x_1\cdots\forall x_n\sum_{1\leq i,j,k\leq n}\lambda^\alpha_{i,j,k}\psi(x_i+x_j+x_k)\geqq 0 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

(Remarquons que nous obtenons un peu plus que le théorèmè énoncé puisqu'on peut se limiter à des combinaisons linéaires particulières du type $x_i+x_j+x_k$ mais cela n'a pas un intérêt fondamental!).

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{F}$ une famille de fonctions convexes du type de celles indiquées dans la premiere partie et $SL_{\mathscr{F}}$ la classe des sous espaces d'Orlicz généralisés $L_{\mathscr{F}}$. Alors $SL_{\mathscr{F}}$ est caractérisée par l'ensemble* (Γ) *des conditions du type*

$$\sum_i\lambda_i F(a_i^1x_1+\cdots+a_i^nx_n)\geqq 0$$

qui sont vraies sur $\mathbb{R}$ pour toute fonction $F\in\mathscr{F}$.

DÉMONSTRATION. Ces conditions sont évidemment nécessaires car tout $L_F\in L_{\mathscr{F}}$. Elles sont suffisantes car $SL_{\mathscr{F}}$ est la plus petite classe stable par ultraproduit ψ-somme, sous-espace et ψ-isométrie contenant les ψ-espaces $(\mathbb{R},F)$ à une dimension.

EXEMPLE. 1) Si $\mathscr{F} = \{x^p\}$, les conditions sont données dans [1].

Donnons maintenant le résultat important suivant, qui lie les caractérisations de différentes classes.

THÉORÈME. (Krivine). *Soit E un ensemble et une injection $a \to x_a$ de E dans l'ensemble des variables. Soit $\mathscr{C}$ une classe de ψ-espaces stable par ψ-somme directe et ultraproduit. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:*

1) *Il existe une application ϕ: $E \to C$ de E dans un espace C de $\mathscr{C}$ satisfaisant les propriétés:*

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{k_\alpha} \lambda_j^\alpha \psi(u_{j,1}^\alpha \phi(a_1^\alpha) + \cdots + u_{j,n}^\alpha \phi(a_n^\alpha)) \leqq \tau_\alpha$$

où α est un ensemble d'indices, τ_α, λ_j^α, $u_{j,1}^\alpha \in \mathbb{R}$, $a_i^\alpha \in E$. On suppose que dans ces conditions est incluse une condition $\psi(\phi(a)) \leqq \sigma_a$ pour chaque $a \in E$ $(\sigma_a \in \mathbb{R}^+)$.

2) *Pour toute famille (ρ_α), $\rho_\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\rho_\alpha = 0$ sauf pour un nombre au plus fini de valeurs de α, telle que*

$$\sum_\alpha \rho_\alpha \sum_{j=1}^{k_\alpha} \lambda_j^\alpha \psi(u_{j,1}^\alpha x_1^\alpha + \cdots + u_{j,n}^\alpha x_n^\alpha) \geqq 0$$

soit une formule vraie dans tout espace de $\mathscr{C}$ (x_i^α variable associée à a_i^α), alors on a aussi $\sum_\alpha \rho_\alpha \tau_\alpha \geqq 0$.

Avant de faire la démonstration du théorème nous allons donner deux exemples fondamentaux sous forme de théorème.

On remarquera que dans ces exemples les λ_j^α valent toujours ± 1.

EXAMPLE FONDAMENTAL 1.

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{C}$ une classe stable par ultraproduit et ψ-somme, λ une réelle fixée, $\mathscr{C}_\lambda$ la classe des espaces normés E tels qu'il existe une application linéaire $E \to C$ de E dans un espace de $\mathscr{C}$ avec $\psi(\lambda x) \leqq \psi(Tx) < \psi(x)$. Alors $\mathscr{C}_\lambda$ est caractérisé par les formules:*

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n (\sum \rho_{ijk} \psi(x_i + x_j + x_k) \geqq \sum \rho_l' \psi(\lambda x_l))$$

si

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n (\sum \rho_{ijk} \psi(x_i + x_j + x_k) \geqq \sum \rho_l' \psi(x_l))$$

est l'ensemble des formules de ce type $(\rho_{ijk}, \rho_l \in \mathbb{R})$ qui sont vraies pour tout espace C de $\mathscr{C}$.

DÉMONSTRATION. $E \in \mathscr{C}_\lambda$ équivaut à: il existe C, $\phi: E \to C$ avec

* (1) $\psi(\lambda a) \leqq \psi(\phi(a))$ pour tout $a \in E$

* (2) $\psi(\phi(a) + \phi(b) + \phi(c)) \leqq \psi(a + b + c)$

pour tout a, b, $c \in E$ (on ne précise pas par un indice ψ_E ou ψ_C etc..., il n'y a jamais d'ambiguité possible).

En effet si (1) et (2) sont vérifiés, ϕ est automatiquement une application linéaire vérifiant $\psi(\lambda x) < \psi(\phi x) < \psi(x)$. Appliquant le théorème de Krivine, avec

$$-\psi(\phi(a)) \leqq -\psi(\lambda a)$$

$$\psi(\phi(a)) + \phi(b) + \phi(c) \leqq \psi(a + b + c)$$

(condition qui inclue $\psi(\phi(a)) \leqq \psi(a)$), on obtient le théorème cherché.

EXAMPLE FONDAMENTAL 2.

THÉORÈME. *Soit $\mathscr{C}$ une classe stable par ultraproduit et ψ-somme, $\lambda \in (0,1)$, $(Q\mathscr{C})_\lambda$ la classe des espaces de Banach E tels qu'il existe un espace C' quotient d'un espace C de $\mathscr{C}$ et une application T linéaire: $E \to C'$ avec $\psi(\lambda x) \leqq \psi(Tx) \leqq \psi(x)$. Alors $(Q\mathscr{C})_\lambda$ est caractérisée par les formules*

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) \geqq \sum_j \psi\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_j^i x_i\right)\right)$$

avec $\mu_j^i \in \mathbb{R}$, telle que les formules

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(x_i) \geqq \sum_j \psi\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_j^i x_i\right)\right)$$

soient vraies sur tout espace C de $\mathscr{C}$.

DÉMONSTRATION. Soit E un espace normé. Si $E \in (Q\mathscr{C})_\lambda$, il satisfait clairement les formules indiquées d'après la définition du ψ d'un quotient (remarquer que tout ultraproduit de quotients est un quotient fort, c'est-à-dire un quotient pour lequel le ψ est atteint par un élément de chaque classe).

Inversement supposons que E satisfasse les formules indiquées. Il existe alors, d'après le théorème ($2 \Rightarrow 1$), une application $\phi: E \to C$ telle que

$$\psi(\mu_{j,1}\phi(a_1) + \cdots + \mu_{j,n}\phi(a_n) \geqq \psi[\lambda(\mu_{j,1} a_1 + \cdots + \mu_{j,n} a_n)]$$

et

$$\psi(\phi(a)) \leqq \psi(a).$$

Soit C_0 le sous-espace de C engendré par l'image de ϕ, soit $T: C_0 \to E$ définie par

$$T(\lambda_1 \phi(a_1) + \cdots + \lambda_n \phi(a_n) = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

T est linéaire et de plus $\psi(x) < \psi(T x) < \psi(x/\lambda)$ donc T s'étend à $\bar{C}_0$ (T est continue).

Soit $N = T^{-1}\{0\}$, et U l'application induite par T, $U: \bar{C}_0/N \to E$. U est bijective. Considérons alors $U^{-1}: E \to \bar{C}_0/N$ ($U^{-1}(a) =$ classe de $\phi(a)$), donc

$$\psi(U^{-1}a) \leqq \psi(\phi(a)) \leqq \psi(a)$$

et

$$\psi(U^{-1}(a)) \geqq \psi(\lambda\, a).$$

Donc E est bien un espace de $(Q\mathscr{C})_\lambda$. C.Q.F.D.

Démonstration du Théorème.

$1 \Rightarrow 2$ est évident. En effet si (1) est vraie, il existe

$$\phi: E \to C \text{ avec } \sum_{j=1}^{k_\alpha} \lambda_j^\alpha \psi(\mu_{j,1}^\alpha a_1^\alpha + \cdots + \mu_{j,n}^\alpha a_n^\alpha) \leqq \tau_\alpha.$$

Donc si

$$\sum_j \rho_\alpha \sum_j \lambda_j^\alpha \psi(\mu_{j,1}^\alpha x_1^\alpha + \cdots + \mu_{j,n}^\alpha x_n^\alpha) \geqq 0$$

est vraie sur $\mathscr{C}$, en réalisant x_j^α comme $\phi(a_j^\alpha)$ on a

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \sum \rho_\alpha \sum \lambda_j^\alpha\, \psi\, (\sum \mu_{j,i}^\alpha \phi(a_i^\alpha)) \\ &\leqq \sum \rho_\alpha \tau_\alpha. \end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 1$. Soit E un ensemble. Soit $S\mathscr{C}$ la classe des sous-espaces des espaces de $\mathscr{C}$. $S\mathscr{C}$ est caractérisée par toutes les formules

$$\sum_{j=1}^{l_\beta} b_j^\beta \psi\left(\sum_i c_{j,i}^\beta y_i\right) \geqq 0$$

qui sont vraies dans $\mathscr{C}$ (démonstration habituelle). Soit X l'ensemble des variables associées aux éléments de E et $\mathscr{E}$ l'ensemble des termes $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ écrits avec ces variables ($\lambda_i \in \mathbb{R}$). $\mathscr{E}$ est donc le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base X. Soit $F: \mathscr{E} \to \mathbb{R}^+$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{l_\beta} b_i^\beta F(c_{i,1}^\beta e_1 + \cdots + c_{i,n}^\beta e_n) \geqq 0$$

pour $\beta \in B$, $e_1, \cdots, e_n \in \mathscr{E}$, $c_{i,k}^\beta \in \mathbb{R}$

(II) $$\sum_{j=1}^{k_-} \lambda_j^\alpha F(\mu_{j,1}^\alpha x_{a_1} + \cdots + \mu_{j,n}^\alpha x_{a_n}) \leqq \tau_\alpha$$

où $\alpha \in A$, $a_1, \cdots, a_n \in E$, x_{a_i} associée à a_i.

De (I) on déduit que $(\mathscr{E}, F)$ est un ψ-espace de $S\mathscr{C}$, de (II) que l'application $a \to x_a$ de E dans $\mathscr{E}$ satisfait à la condition 1 du théorème.

Donc s'il n'existe pas de $\phi: E \to C$ satisfaisant (I), il n'existe pas non plus de telle fonction F.

Soit maintenant Λ l'espace vectoriel dont une base est $\mathscr{E} \cup \{\mathbf{1}\}$, où $\mathbf{1} \notin \mathscr{E}$.

Pour distinguer les éléments de $\mathscr{E}$ et de Λ, on notera dans Λ,

$$v_1[e_1] + \cdots + v_n[e_n]$$

les éléments de $\mathscr{E}$, si $e_1 \cdots e_n \in \mathscr{E}$.

Soit L une forme linéaire sur Λ telle que

1) $L(\mathbf{1}) = 1$

2) $L([e]) \geqq 0$ si $e \in \mathscr{E}$

3) $L\left(\sum_{i=1}^{l_\beta} b_i^\beta \left[c_{i,1}^\beta e_1 + \cdots + c_{i,n}^\beta e_n\right]\right) \geqq 0$

4) $L\left(\tau_\alpha \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{k_\pi} \lambda_j^\alpha \left[\mu_{j,1}^\alpha x_{a_1} + \cdots + \mu_{j\,n}^\alpha x_{a_n}\right]\right) \geqq 0.$

S'il n'existe pas de F, il ne peut non plus exister une telle forme linéaire L.

Soit Γ le cône de Λ formé des combinaisons linéaires positives de ces éléments intervenant dans les formules 1. 2. 3. 4. ci-dessus. Montrons que Γ est un cône archimédien.

Il suffit de montrer que pour tout $[e] \in \Gamma$, il existe un nombre positif $\sigma(e)$ tel que: $\sigma(e)\,\mathbf{1} - [e] \in \Gamma$. Or tout élément $e \in \mathscr{E}$ s'écrit $\lambda_1 x_{a_1} + \cdots + \lambda_n x_{a_n}$ avec $a_i \in E$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Or on a $\sigma_{a_i}\mathbf{1} - [x_{a_i}] \in \Gamma$ car pour tout $a \in E$ on a $\psi(\phi(a)) \leqq \sigma_a$ pour un certain σ_a (* de l'énoncé).

Mais de $\psi(\lambda_i x_{a_i}) \leqq \Phi(\lambda_i)\psi(x_{a_i})$ on déduit $\Phi(\lambda_i)[x_{a_i}] - [\lambda_i x_{a_i}] \in \Gamma$ et

$$\sum_i \sigma_{a_i}\Phi(\lambda_i)\mathbf{1} - \sum_i [\lambda_i x_{a_i}] \in \Gamma.$$

Or

$$\begin{aligned} \psi[\Sigma \lambda_i x_i] &\leqq \frac{1}{n}\, \Sigma \psi(\lambda_i n\, x_i) \text{ (convexité)} \\ &\leqq \frac{\Phi(n)}{n} \Sigma \psi(\lambda_i x_i) \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\Phi(n}{n}\Sigma[\lambda_i x_i] - [\Sigma\lambda_i x_i] \in \Gamma$$

et par suite $\Sigma\,\sigma_{a_i}\,\dfrac{\Phi(n)\,\Phi(\lambda_i)}{n}\mathbf{1} - [\Sigma\lambda_i x_{a_i}] \in \Gamma$ donc Γ est archimédien.

Comme il n'existe pas de forme linéaire positive L sur Γ, avec $L(\mathbf{1}) = 1$, on a $-\mathbf{1} \in \Gamma$. Soit

$$\begin{aligned} -\mathbf{1} = & \sum_{\gamma} v_\gamma[e_j] + \sum_{\beta} \sigma_\beta \sum_{j} b_j^\beta(\Sigma\, c_{j,i}^\beta e_i) \\ & + \sum_{\alpha} \rho_\alpha \tau_\alpha \mathbf{1} - \sum_{\alpha} \rho_\alpha \sum_{j} \lambda_j^\alpha [\Sigma\, \mu_{j,i}^\alpha x_{a_i}] \end{aligned}$$

or v_γ, σ_β, $\rho_\alpha \geqq 0$ et tous nuls sauf un nombre fini.

Donc

$$\Sigma\rho_\alpha \tau_\alpha = -1$$

et

$$\sum_{\alpha} \rho_\alpha \sum_{j} \lambda_j^\alpha \left[\sum_{i} \mu_{j,i}^\alpha x_{a_i}\right] = \sum_{\gamma} v_\gamma[e_\gamma] + \Sigma\, \sigma_\beta\, \Sigma\, b_j^\beta \left[\sum_{i} c_{j.i}^\beta e_i\right].$$

Remplaçant tous les e_j et e_i intervenant dans cette formule par leurs expressions du type $e(x_{a_1} \cdots x_{a_n}$ et chaque $[u]$ par $\psi(u)$, le deuxième membre devient une formule qui est $\geqq 0$ dans tout espace de la classe $\mathscr{E}$. Le premier membre l'est donc aussi et on a:

$$\sum_{\alpha} \rho_\alpha \sum_{j} \lambda_j^\alpha \left(\sum_{i} \mu_{j\,i}^\alpha x_{a_i}\right) \geqq 0 \text{ dans tout espace de } \mathscr{C}.$$

Comme $\Sigma_\alpha \rho_\alpha \tau = -1$ la condition 2 du théorème n'est pas vérifiée, C.Q.F.D.

3. Autres structures: ψ-espaces réticulés. Espaces F et p-normés

A) *ψ-espaces réticulés.* On appelle ainsi (espaces de Banach modulaires au sens d'Orlicz-Nakano) un ψ-espace réticulé, avec une fonction ψ-compatible avec l'ordre, c'est-à-dire vérifiant de plus

1) $\psi(x + y) \geqq \psi(x) + \psi(y)$
si x, $y \geqq 0$, $\psi(x + y) > \psi(y)$ si $x > 0$.

2) $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)$, si $x \cap y = 0$

3) $\psi(|x|) = \psi(x)$.

Supposons que ψ soit dominée par Φ, où Φ est une fonction du type de celle introduite à la première partie, donc $\psi(\lambda x)/\psi(x) \leqq \Phi(\lambda)$.

Supposons que $\mathscr{F}$ soit une classe de fonctions du type de celles introduites à la première partie.

THÉORÈME. *S'il existe une classe $\mathscr{F}$ de fonctions convexes telle que $\psi(\lambda x)/\psi(x) \in \mathscr{F}$ pour tout $x \in E$, alors le ψ-espace réticulé (E, ψ) est un espace $L_{\mathscr{F}}$.*

DÉMONSTRATION. Les conditions imposées à ψ font que (E, ψ) satisfait aux conditions d'application du théorème 2.1. page 317 de [3]. Il existe donc une algèbre de Boole $\mathscr{B}$ tel que l'espace des éléments $\mathscr{B}$-étagés soit dense dans (E, ψ), (pour la structure de Banach associée). La classe $L_{\mathscr{F}}$ étant stable par ultraproduit, il suffit de montrer que tout espace finiment engendré réticulé de $\mathscr{B}$ est isométrique à un espace de $L_{\mathscr{F}}$. Or les espaces réticulés finiment engendrés par des éléments de $\mathscr{B}$ sont de dimension finite et du type $\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_n u_n$, où $u_1 \cdots u_n$ est une famille d'éléments de $\mathscr{B}$, étrangers 2 à 2, $\lambda_1 \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\psi(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = \psi(\lambda_1 u_1) + \cdots + \psi(\lambda_n u_n).$$

On peut toujours choisir les $u_1 \cdots u_n$ tels que $\psi(u_1) = \cdots = \psi(u_n) = 1$, on a donc $\psi(\lambda_i u_i) = F_i(\lambda_i)$, $i = 1 \cdots n$, d'où

$$\psi(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n) = F_1(\lambda_1) + \cdots + F_n(\lambda_n)$$

avec $F_1, \cdots, F_n \in \mathscr{F}$, ceci définit un espace $L_{\mathscr{F}}(\Omega, \mu)$ avec $\Omega = \{1 \cdots n\}$, $\mu = \delta_{(1)} + \cdots + \delta_{(n)}$ d'où le théorème.

Il donne donc une caractérisation des espaces $L_{\mathscr{F}}$ dans les ψ-espaces réticulés.

Remarquons que le théorème obtenu est l'extension naturelle des résultats type Kakutani-Nakano.

Si la classe $\mathscr{F}$ est réduite à $\{x^p\}$ on obtient les théorèmes classiques [1] sur les L^p. Ce théorème très simple montre en quoi les espaces L^p sont particuliers. Il est facile de voir que c'est le seul cas où $\mathscr{F}$ se réduit à un élément.

B) *F-espaces.* On sait que tout espace vectoriel métrisable E a une structure uniforme définissable à partir d'une pseudo-norme que nous noterons ici α plutôt que F (notation de [5]), pour éviter les confusions.

On a donc $\alpha: E \to \mathbb{R}^+$

1) $\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\alpha(x + y) \leqq \alpha(x) + \alpha(y)$

3) $\alpha(\lambda x) \leqq \alpha(x)$, $|\lambda| \leqq 1$

4) $\alpha(x_n) \to 0 \Rightarrow \alpha(\lambda x_n) \to 0$

5) $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \alpha(\lambda_n x) \to 0$

L'ultraproduit de tels espaces est étudié dans [9]. La théorie faite ici des espaces

$L_{\mathscr{F}}$ ne nécessite nullement que les fonctions F considérées soient convexes dans la mesure où l'on ne s'intéresse pas aux espaces de Banach. Il suffit par exemple de supposer F croissante continue.

Les théorèmes de caractérisation s'étendent par des méthodes analogues à celles développées dans [9], dans le cas des espaces réticulés, il faut simplement s'assurer que les suites décroissantes d'éléments positifs sont convergentes, ce que l'on fait comme dans le cas $p < 1$. On peut donc ainsi compléter les résultats de [9] par l'étude des $L_{\mathscr{F}}$ où $\mathscr{F}$ est simplement formée de fonctions croissantes.

Bibliographie

1. J. Bretagnolle, Dacunha-Castelle and J. L. Krivine, *Lois stables et espaces L^p*, Ann. Inst. H. Poincaré 2 (1966), 231–263.

2. D. Dacunha-Castelle, Séminaire Goulaouic-Schwartz IX, X, 1972.

3. D. Dacunha-Castelle and J. L. Krivine, *Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et algèbres de Banach*, Studia Math. (1971), 315–334.

4. S. Kwapien, *Opérateurs factorisables à travers des L^p* (a paraître).

5. G. Köthe, *Topological Vector Spaces* I, Springer Verlag, 1970.

6. J. L. Krivine, *Sommes continues de ϕ-espaces* (à paraître).

7. J. Lindenstrauss and A. Pelcynski, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}^p$-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

8. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Orlicz spaces of sequences I & II*, Israel J. Math. **10** (1971), 379–390 and **11** (1972), 355–379.

9. M. Schreiber, Ann. Inst. H. Poincaré **8** (1972).

Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
Orsay, France